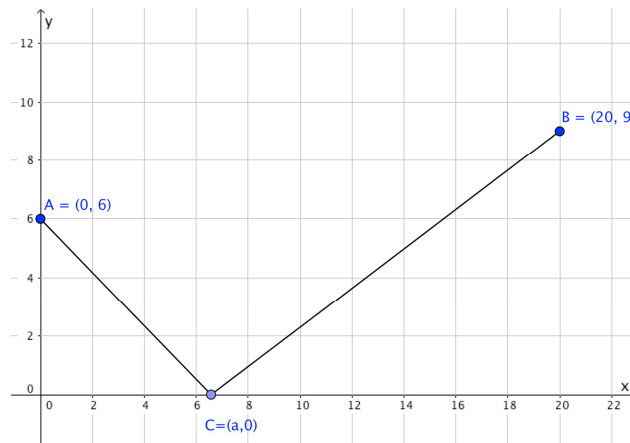


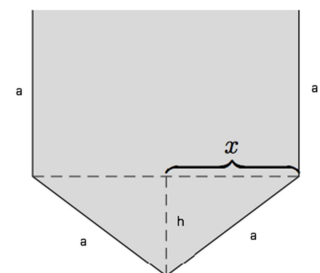
Thema: Extremwertaufgaben mit besonderen Ableitungsregeln		Grundkompetenz:
Name:	Schwierigkeitsgrad: mittel	Klasse:

1. Begründe mittels Differentialrechnung, ob es eine positive reelle Zahl gibt, für die gilt: addiert man zu dieser Zahl ihren Kehrwert, so ist die Summe minimal.

2. Bestimme die x-Koordinate a des Punktes C so, dass der Weg ACB minimal wird.



3. Aus vier Blechstreifen mit der Breite a (in cm) soll wie in der Abbildung dargestellt eine Dachrinne mit möglichst großer Querschnittfläche hergestellt werden. Bestimme die Breite $2x$ der Dachrinne.



Thema: Lösungen – Extremwertaufgaben mit besonderen Ableitungsregeln		Grundkompetenz:
Name:	Schwierigkeitsgrad: schwer	Klasse:

1. Begründe mittels Differentialrechnung, ob es eine positive reelle Zahl gibt, für die gilt: addiert man zu dieser Zahl ihren Kehrwert, so ist die Summe minimal.

Zahl ... x

Hauptbedingung: $s(x) = x + \frac{1}{x}$

$$s'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

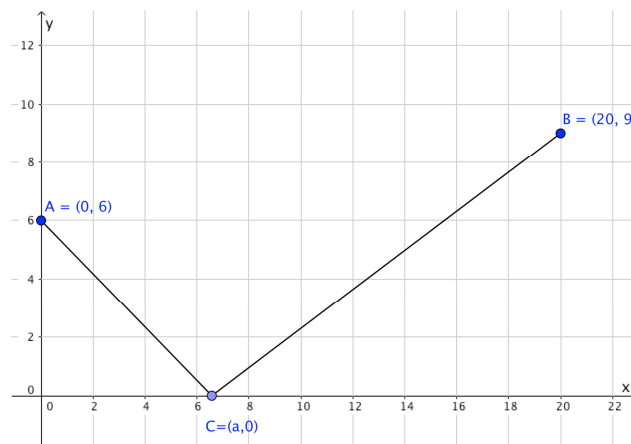
$$s''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$s'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -1 \notin \mathbb{R}^+ \quad x_2 = 1$$

$s''(1) = 2 > 0$, d.h. die Summe ist für $x = 1$ ein Minimum.

Die geforderte Bedingung wird nur von der reellen Zahl 1 erfüllt.

2. Bestimme die x-Koordinate a des Punktes C so, dass der Weg ACB minimal wird.



Hauptbedingung: $f(a) = \sqrt{a^2 + 36} + \sqrt{(20 - a)^2 + 81} = \sqrt{a^2 + 36} + \sqrt{a^2 - 40a + 481}$

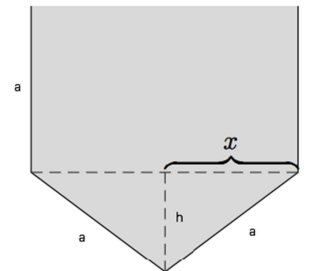
$$f'(a) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 36}} + \frac{a - 20}{\sqrt{a^2 - 40a + 481}}$$

Berechne unter Verwendung von Technologie: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 36}} + \frac{a - 20}{\sqrt{a^2 - 40a + 481}} = 0 \quad \rightarrow \quad a = 8$

$f''(8) = \frac{3}{50} > 0$, d.h. mit $a = 8$ wird der Weg ACB minimal.



3. Aus vier Blechstreifen mit der Breite a (in cm) soll wie in der Abbildung dargestellt eine Dachrinne mit möglichst großer Querschnittfläche hergestellt werden. Bestimme die Breite $2x$ der Dachrinne.



Hauptbedingung: $A(x, h) = 2xa + xh$

Nebenbedingung: $a^2 = x^2 + h^2 \quad \rightarrow \quad h = \sqrt{a^2 - x^2}$

$$A(x) = 2ax + x\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$A'(x) = 2a - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2}$$

Berechne unter Verwendung von Technologie: $2a - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{a \cdot \sqrt[4]{12}}{2}$

$A''\left(\frac{a \cdot \sqrt[4]{12}}{2}\right) < 0$, d.h. für $x = \frac{a \cdot \sqrt[4]{12}}{2}$ wird die Querschnittsfläche maximal.

Die Breite der Dachrinne ist $2x = a \cdot \sqrt[4]{12}$ cm.

