Lösung Beispiel 1041.) c)

(1) Eine Höhe steht normal auf ihre Seite und geht durch den gegenüberliegenden Eckpunkt. Es werden die Höhen auf die Seiten a bzw. c in allgemeiner Form aufgestellt und anschließend miteinander geschnitten.

$\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Da die beiden Vektoren $\overrightarrow{BC}$ bzw. $\overrightarrow{AB}$ normal auf ihre Höhen stehen, können diese als Normalvektoren der Höhengeraden verwendet werden. Es gilt daher:

h_c: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ➔ $2x - 3y = -3$ $\qquad$ $2x - 3y = -3$

h_a: $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ➔ $x + 5y = -8 \quad |\bullet(-2)$ $\qquad$ $\underline{-2x - 10y = 16}$

$-13y = 13$

$y = -1$

Durch Einsetzen in z. B. die zweite Gleichung erhält man: $x - 5 = -8$ ➔ $x = -3$

Der Höhenschnittpunkt besitzt die Koordinaten H = (-3|-1).

(2) Den Schwerpunkt erhält man mit der Formel $S = \frac{1}{3} \bullet (A + B + C)$.

$$S = \frac{1}{3} \bullet \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3} \bullet \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \left(-\frac{4}{3} \middle| -\frac{4}{3}\right)$$

(3) Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Streckensymmetralen.

Eine Streckensymmetrale steht normal auf ihre Seite und geht durch deren Mittelpunkt. Es werden die Streckensymmetralen auf die Seiten a bzw. c in Normalvektorform aufgestellt und anschließend miteinander geschnitten.

$$M_{BC} = \frac{1}{2} \cdot (B + C) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-0{,}5|-1{,}5)$$

$$M_{AB} = \frac{1}{2} \cdot (A + B) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = (-2|-2{,}5)$$

Da die beiden Vektoren $\overrightarrow{BC}$ bzw. $\overrightarrow{AB}$ normal auf ihre Streckensymmetralen stehen, können diese als Normalvektoren der Streckensymmetralen verwendet werden. Es gilt daher:

$$m_c: \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow 2x - 3y = 3{,}5 \qquad 2x - 3y = 3{,}5$$

$$m_a: \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow x + 5y = -8 \quad |\cdot (-2) \quad \underline{-2x - 10y = 16}$$

$$-13y = 19{,}5$$

$$y = -1{,}5$$

Durch Einsetzen in z. B. die zweite Gleichung erhält man: $x + 5 \cdot (-1{,}5) = -8$

$\Rightarrow x = -0{,}5$

Der Umkreismittelpunkt besitzt die Koordinaten U = (-0,5|-1,5).