

Intuitive Phase der Differentialrechnung

Als Begründer der Differentialrechnung gelten – nach verschiedenen Vorläufern – vor allem **Isaac Newton** (1643–1727) und **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716). Dabei ging Newton vom Problem der Geschwindigkeit zu einem speziellen Zeitpunkt aus, während bei Leibniz das Tangentensteigungsproblem im Vordergrund stand. Beide entwickelten nahezu gleichzeitig, aber unabhängig voneinander, die wichtigsten Differentiationsregeln. Von ihnen und ihren Nachfolgern wurde die Methode der Differentialrechnung auf Probleme der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik und Astronomie (Berechnung von Planetenbahnen), erfolgreich angewendet. Dies, obwohl die dabei durchgeführten Grenzwertüberlegungen vom heutigen Standpunkt aus als unexakt angesehen werden können und etwa dem Präzisionsniveau entsprechen, auf dem wir uns in den Kapiteln 2 und 3 bewegt haben.

Newton betrachtet zeitabhängige Größen. Nach seiner Ausdrucksweise „fließt“ eine solche Größe in der Zeit, weshalb er sie als „Fluente“ bezeichnet. Ihre Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t bezeichnet er als „Fluxion“ und wählt dafür das Symbol $\dot{x}(t)$. Newton ermahnt jedoch seine Le-

ser, die „Zeit“ seiner Fluxionsrechnung nicht mit der realen Zeit zu verwechseln, dh. t kann auch irgendeine andere kontinuierlich veränderbare Größe sein.

Wie Newton bei der Herleitung von Differentiationsregeln vorgeht, erläutern wir am Beispiel von $x(t) = t^3$. Er interpretiert $x(t)$ als den in der Zeit t zurückgelegten Weg und betrachtet ein „unendlich kleines“ Zeitintervall $[t; t + o]$. In diesem Zeitintervall nimmt er gleichförmige Bewegung an. Die Geschwindigkeit in diesem Zeitintervall ist dann der Differenzenquotient:

$$\frac{x(t+o) - x(t)}{o} = \frac{(t+o)^3 - t^3}{o}$$

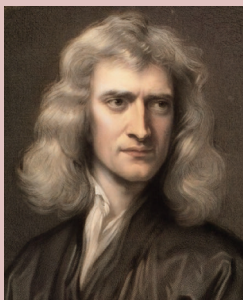
Der Zähler dieses Bruchs kann umgeformt werden:

$$(t+o)^3 - t^3 = t^3 + 3t^2o + 3to^2 + o^3 - t^3 = 3t^2o + 3to^2 + o^3$$

Dividiert man durch o (es ist $o \neq 0$ vorausgesetzt), erhält man:

$$\frac{(t+o)^3 - t^3}{o} = 3t^2 + 3to + o^2$$

Setzt man nun nachträglich doch $o = 0$, ergibt sich die Ableitung: $\dot{x}(t) = 3t^2$

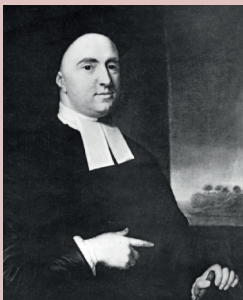


Isaac Newton
(1643–1727)



Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

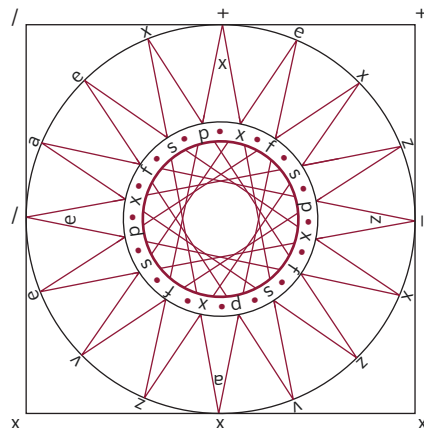




George Berkeley
(1685–1753)

Newtons Vorgehen wurde von vielen seiner Zeitgenossen kritisiert. In der Tat ist sein Vorgehen merkwürdig: Er setzt zunächst $o \neq 0$ voraus, weil sonst der Differenzenquotient nicht gebildet werden kann. Anschließend wird aber doch $o = 0$ gesetzt. Dazu bemerkte der Theologe **George Berkeley** (1685–1753) kritisch und spöttisch:

„Bisher [gemeint: bis zum Anschreiben des Differenzenquotienten] habe ich vorausgesetzt ..., dass t einen wirklichen Zuwachs hat, dass o etwas ist [gemeint: $o \neq 0$]. Und ich bin durchweg von dieser Voraussetzung ausgegangen, ohne die ich nicht imstand gewesen wäre, einen einzigen Schritt zu tun ... Ich bitte dann um die Erlaubnis, eine neue Voraussetzung machen zu dürfen, die der ersten entgegenkommt; dh. ich will jetzt voraussetzen, dass es keinen Zuwachs von x gibt oder dass o nichts ist [gemeint: $o = 0$], welche zweite Voraussetzung meine erste zerstört und mit ihr unverträglich ist ... All das scheint eine sehr widerspruchsvolle Art von Argumentation zu sein, so wie sie in der Theologie nicht erlaubt wäre ... Ich gebe zu, dass man ein Zeichen entweder etwas oder nichts bezeichnen lassen kann und dass folglich in der ursprünglichen Bezeichnungsweise $t + o$ das o entweder einen Zuwachs oder ein Nichts bezeichnet haben mag. Aber welches von diesen ihr es auch bezeichnen lasst, ihr müsst mit einer solchen Bezeichnung widerspruchsfrei argumentieren und dürft nicht gestützt auf einen Doppelsinn voranschreiten; denn das wäre ein



Spielplan zu *De ludo algebraico*
von George Berkeley

offenbares Sophisma. Mögt ihr mit Worten oder Symbolen argumentieren, die Regeln des richtigen Denkens sind immer dieselben. Noch kann man annehmen, dass ihr in der Mathematik das Privileg verlangt, von ihnen ausgenommen zu sein ... Und was sind diese verschwindenden Zuwächse? Sie sind weder endliche Größen, noch unendliche Größen noch auch nichts. Dürfen wir sie nicht die Gespenster abgeschiedener Größen nennen?“

[Berkeley, G.: The Analyst. 1734]

Newton hat auf diese Kritik reagiert und die Begriffe „erste Verhältnisse“ und „letztes Verhältnis“ verschwindender Größen entwickelt. Die „ersten Verhältnisse“ liegen vor, solange o gegen 0 strebt, aber von 0 verschieden ist. Das „letzte Verhältnis“ liegt vor, wenn o schließlich 0 erreicht. Den schwammigen Begriff des „letzten Verhältnisses“ versucht er so zu präzisieren:

„Jene letzten Verhältnisse, mit denen die Größen verschwinden, sind in Wahrheit nicht die Verhältnisse der letzten Größen, sondern die Grenzen (limites), denen sich die Verhältnisse der unbegrenzt abnehmenden Größen jedes Mal nähern, und an die sie näher heran können, als irgendeine gegebene Differenz es ausdrückt ...“

[Newton, I.: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, London 1687]

Dies entspricht ziemlich genau dem auch von uns verwendeten „unbegrenzten Nähern“.



Augustin Louis Cauchy
(1789–1857)



Bernard Bolzano
(1781–1848)

Im 19. Jahrhundert waren die Methoden der Differentialrechnung im Großen und Ganzen entwickelt. Die Begründungen waren jedoch mangelhaft, weshalb man sich verstärkt einer exakteren Grundlegung der Differentialrechnung zuwandte. Ein Charakteristikum war dabei, dass man sich von der geometrischen Anschauung lösen und die Begriffe der Differentialrechnung allein auf der Grundlage der reellen Zahlen aufbauen wollte.

Grundlegende Ideen gehen auf **Augustin Louis Cauchy** (1789–1857) zurück. Seine Grenzwertdefinition sieht aus heutiger Sicht zwar umständlich aus, enthält aber schon das Wesentliche:

„Wenn die einer Veränderlichen nach und nach beigelegten Werte sich einem gegebenen Wert mehr und mehr nähern, so dass in dieser Reihe schließlich Werte existieren, die von jenem gegebenen Wert so wenig, wie man will, verschieden sind, so nennt man den gegebenen Wert die Grenze jener übrigen Werte ...“

[Cauchy, A.L.: Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. De Bure, Paris 1821]

Die Ableitung beschreibt Cauchy folgendermaßen. Er lässt zunächst im Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ die Zahl i gegen 0 streben und stellt fest, dass dabei sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruchs gegen 0 strebt. Dann sagt er:

„Aber während sich diese beiden Glieder unbestimmt und gleichzeitig der Grenze null nähern, wird ihr Verhältnis selbst gegen eine andere Grenze, sie sei positiv oder negativ, konvergieren können ... Diese Grenze, oder dieses letzte Verhältnis,

hat, wenn es existiert, für jeden speziellen Wert von x einen bestimmten Wert; aber es variiert mit x ... Um diese Abhängigkeit auszudrücken, gibt man der neuen Funktion den Namen abgeleitete (derivierte) Funktion, und bezeichnet sie mittels eines Akzentes mit y' oder $f'(x)$.“

[Cauchy, A.L.: Resume des lecons donnees a l'École Polytechnique sur le calcul infinitesimal. De Bure, Paris 1823]

Die Stetigkeit definiert Cauchy im Wesentlichen durch die Gleichung $\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x + \alpha) = f(x)$.

Mit Hilfe des Stetigkeitsbegriffs wurden grundlegende Sätze über reelle Funktionen genauer formuliert und bewiesen. So bewies **Bernard Bolzano** (1781–1848) den Zwischenwertsatz in seiner berühmten Arbeit „Rein analytischer Beweis, daß zwischen zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege“. Dabei ging es nicht darum, jemanden von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen (an der Richtigkeit dieses Satzes zweifelte ja niemand), sondern zu zeigen, dass man diesen Satz ohne Benutzung der Anschauung, allein auf der Grundlage der reellen Zahlen begründen kann.

Während die Differentialrechnung früher hauptsächlich als Hilfsmittel für die Mechanik und Astronomie angesehen wurde, wurde sie im 19. Jahrhundert (wohl durch die exaktere Fundierung) zu einer eigenständigen mathematischen Disziplin, die in eine umfassendere Disziplin eingebettet wurde, die man heute „Analysis“ nennt.

Vor- und Nachteile einer exakteren Fundierung

Bis ins 18. Jahrhundert haben Mathematiker die Differentialrechnung auch ohne exaktere Begriffsdefinitionen (zB des Grenzwerts) erfolgreich angewendet. Viele Naturwissenschaftler, Techniker und andere Anwender arbeiten auch heute noch auf diesem intuitiven Niveau. Es ist also nicht so, dass die intuitiv-anschaulichen Überlegungen allesamt zu falschen Resultaten

geführt haben. Im Gegenteil: Die meisten Resultate waren richtig. Große Mathematiker zeichnen sich oft dadurch aus, dass sie trotz des Fehlens präziser Begriffsbildungen zu richtigen Resultaten kommen. Was bringt also eine exaktere Fundierung? Bei genauerem Hinsehen erkennt man an dieser Vorteile, aber auch Nachteile.

Einige Vorteile einer exakteren Fundierung

- **Bessere Absicherung der Resultate:**
Intuitive Überlegungen führen gelegentlich doch zu Fehlern oder zu Unklarheiten, die nur durch exaktere Definitionen der Begriffe geklärt werden können (siehe zum Beispiel Aufgabe 8.04 auf Seite 164).
- **Bessere Mitteilung:**
Präziser definierte Begriffe können unmissverständlich mitgeteilt werden. Bei anschaulich-intuitiven Begriffsbildungen besteht immer die Gefahr, dass verschiedene Personen sich Verschiedenes darunter vorstellen.
- **Vertiefung des Verständnisses:**
Durch genauere Definitionen erkennt man manche Zusammenhänge besser und weiß, was man voraussetzen muss, damit die Resultate gelten. Beispielsweise kann man erkennen, dass aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt, aber nicht umgekehrt (siehe Seite 161).
- **Kritischere Überprüfung von Anwendungen:**
In der Praxis der Mathematik wird einer exakteren Fundierung oft wenig Bedeutung beigemessen. Man begnügt sich mit einem oberflächlichen Verständnis und hält ein mathematisches Verfahren dann für gesichert, wenn es in vielen Fällen funktioniert. Dieses mag in vielen praktischen Bereichen gerechtfertigt sein. Es besteht aber auch die Gefahr, dass aus man-

gelnder Kenntnis der genaueren Zusammenhänge mathematische Methoden unkritisch angewandt werden.

- **Ästhetik eines logischen Aufbaus:**
Die Klarheit und Schönheit eines exakteren logischen Aufbaus hat für viele Menschen einen besonderen Reiz.

Einige Nachteile einer exakteren Fundierung

- **Verlust von anschaulich-intuitiven Vorstellungen:**
Der Preis, den man für eine exaktere Fundierung zu bezahlen hat, besteht fast immer darin, dass man einige gewohnte Vorstellungen aufgeben oder modifizieren muss. Oft bemerkt man erst hinterher, dass man durch eine exaktere Definition eines Begriffs auch Fälle erfasst hat, an die man zunächst nicht gedacht hat, zB an Oszillationsstellen beim Stetigkeitsbegriff (siehe Seite 160).
- **Kompliziertheit der Darstellung:**
Begriffsdefinitionen und Argumentationen werden durch Exaktifizierungen meist länger und komplexer. Wenn die Darstellungen zu kompliziert werden, kann das ursprünglich angestrebte Ziel der Verständniserleichterung unter Umständen ins Gegenteil verkehrt werden. Durch zu lange, zu komplizierte und zu undurchschaubare Darstellungen kann die Verständlichkeit wieder abnehmen.

