Lösungen Kapitel Kraft

1 Die Newton'schen Gesetze, S. 43

Teste dein Wissen 1:

Welche Aussage über ein Inertialsystem trifft zu? Kreuze die richtige Antwort an.

- a) Die Erde ist ein Inertialsystem.
- b) Das Sonnensystem ist ein Inertialsystem.
- c) In einem Inertialsystem gilt das Trägheitsgesetz.

Antwort:

c) ist korrekt. In einem Inertialsystem gilt das Trägheitsgesetz.

Das bedeutet, dass ein Körper in Ruhe bleibt oder sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, sofern keine äußeren Kräfte auf ihn wirken.

Zusatz: Aber es können auch Sonnensystem und Erde annährend als Inertialsysteme betrachtet werden. Für das Sonnensystem gilt dies immer dann, wenn die Anziehungskräfte der Planeten und der Sonne vernachlässigbar sind (wie das z.B. bei Sonden der Fall ist, wenn man nur kleine Wegstücke betrachtet). Auch die Erde kann in Näherung als Inertialsystem angesehen werden. Voraussetzung ist, dass die Effekte der täglichen und jährlichen Bewegung vernachlässigt werden können und die Schwerkraft der Erde durch eine andere Kraft (etwa die Reaktionskraft der Unterlage bei einem rollenden Ball kompensiert wird). Auch die auf der Erde immer vorhandene Reibung müsste ausgeschaltet werden (z.B. bei Experimenten im Vakuum).

Teste dein Wissen 2:

Beschreibe eine Methode, mit der man die Bewegung der Erde um die Sonne beweisen kann.

Beispielantwort:

Die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne "spiegelt" sich im Sternenhimmel. Die Positionen naher Sterne verschieben sich von der Erde aus gesehen im Jahresverlauf vor dem Hintergrund der ferneren Sterne. Dieser scheinbare Positionsunterschied erklärt sich mithilfe von Parallaxen unter verschiedenen Blickwinkeln. (siehe Abbildung 36.2) Dieser Effekt ist auf die Bewegung der Erde um die Sonne zurückzuführen. Dadurch lassen sich auch die Entfernungen naher Sterne berechnen: Der Polarstern ist z.B. 400 Lichtjahre entfernt.

Es gibt allerdings auch weitere Methoden die Bewegung der Erde um die Sonne zu beweisen.

Teste dein Wissen 3:

Beschreibe den Zusammenhang zwischen dem ersten und dem zweiten Newton'schen Gesetz.

Antwort:

Das **erste Newton'sche Gesetz**, auch bekannt als das *Gesetz der Trägheit*, besagt, dass sich Körper ohne äußere Einwirkung geradlinig gleichförmig bewegen oder in Ruhe sind. Dies bedeutet, dass ein Körper in Bewegung oder in Ruhe bleibt, es sei denn, eine externe Kraft wirkt auf ihn ein.

Das **zweite Newton'sche Gesetz** definiert die Kraft \vec{F} und erklärt ihre Wirkung auf die Bewegung eines Körpers. Es besagt, dass wenn eine Kraft auf einen Körper wirkt, dieser beschleunigt wird: Er wird schneller oder langsamer oder er ändert seine Bewegungsrichtung. Die Kraft \vec{F} ist direkt proportional zur Beschleunigung a.

In diesem Sinne ist das zweite Gesetz eine Erweiterung des ersten. Während das erste Gesetz die Bewegung eines Körpers ohne äußere Kräfte beschreibt, erklärt das zweite Gesetz, wie die

Bewegung eines Körpers sich ändert, wenn eine externe Kraft auf ihn einwirkt. Beide Gesetze zusammen bilden die Grundlage für unser Verständnis von Bewegung und Kraft.

Teste dein Wissen 4:

Markiere die richtige Aussage:

- a) Ein Körper erhält durch die Wirkung von 1 N eine Geschwindigkeit von 1 m/s.
- b) Ein Körper erhält durch die Wirkung von 1 N eine Beschleunigung von 1 m/s².
- c) Ein Körper mit 1 kg Masse wird durch 1 N mit 1 m/s² beschleunigt.

Antwort:

Die richtige Aussage ist **c)** Ein Körper mit 1 kg Masse wird durch 1N mit 1m/s² beschleunigt. Dies folgt direkt aus dem zweiten Newton'schen Gesetz, das besagt, dass die auf einen Körper wirkende Kraft (in N... Newton) gleich der Masse des Körpers multipliziert mit seiner Beschleunigung ist:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Wenn wir die Werte einsetzen, erhalten wir:

$$1 N = 1 kg \cdot 1 \frac{m}{s^2}$$

Das bedeutet, dass eine Kraft von 1 N auf einen Körper mit einer Masse von 1 kg eine Beschleunigung von 1 m/s² verursacht.

Aussage a) ist falsch, da die Kraft nicht direkt eine Geschwindigkeit verursacht, sondern eine Beschleunigung, und die Beschleunigung hängt von der Masse des Körpers ab. Aussage b) ist falsch, da die Beschleunigung von der Masse des Körpers abhängt.

Teste dein Wissen 5:

Erkläre den Begriff "Gewicht". Ermittle dein eigenes Gewicht.

Antwort:

Das "Gewicht" bzw. die Gewichtskraft eines Körpers ist die Kraft, mit der er aufgrund der Erdanziehung zum Mittelpunkt der Erde gezogen wird. Diese Kraft wird durch das Produkt aus der Masse m des Körpers und der Fallbeschleunigung \vec{g} berechnet:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

Die Fallbeschleunigung auf der Erde ist von Ort zu Ort unterschiedlich. Je nach geografischem Ort variiert daher auch das Gewicht eines Körpers.

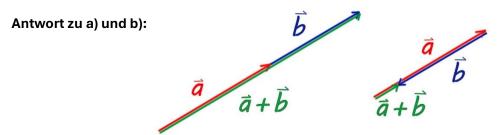
Auf anderen Himmelskörpern wie dem Mond oder dem Mars ist die Anziehungskraft geringer als auf der Erde, daher ist das Gewicht eines Körpers dort auch geringer.

Zusammengefasst ist das Gewicht die Kraft, mit der ein Körper von der Erde angezogen wird, und es hängt von der Masse des Körpers und der Erdbeschleunigung ab.

Teste dein Wissen 6:

Kräfte werden vektoriell addiert. Zeichne die Addition für

- a) Kräfte, die parallel und gleichgerichtet sind.
- b) Kräfte, die parallel und entgegengesetzt gerichtet sind.
- c) Kräfte, die einen beliebigen Winkel einschließen.



Teste dein Wissen 7:

Zeichne in der Abb. 43.1 die wirkenden Kräfte ein.

Antwort:

(Parabelförmige) Wurfbahn eines Balls unter Vernachlässigung des Luftwiderstands:

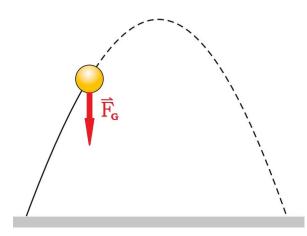


Illustration: Bernd Pavlik, Neusiedl am See

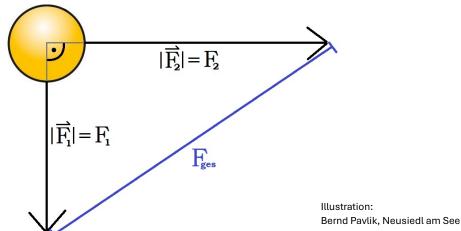
Wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt, wirkt auf einen geworfenen Ball nur die **Erdanziehungskraft** \vec{F}_{G} (oder Gravitationskraft). Will man nun die Wirkung der Kraft auf den Ball mit Masse m beschreiben, dann kann man die **Gewichtskraft** nutzen. Sie wirkt aufgrund der Gravitation immer **vertikal nach unten** bzw. in Richtung des Erdmittelpunkts. Sie ist verantwortlich für die Beschleunigung des Balls in vertikaler Richtung. Zum Zeitpunkt des Wurfs wirkt eine **Anfangskraft** in die Wurfrichtung. Diese Kraft verleiht dem Ball eine

Anfangsgeschwindigkeit und -richtung, aber sobald der Ball die Hand des Werfers verlässt, hört diese Kraft auf zu wirken. Der Ball fliegt weiter aufgrund seiner Trägheit, während die Erdanziehung ihn nach unten zieht, was zu einer parabelförmigen Flugbahn führt. Zusammengefasst: Die einzige Kraft, die während des Fluges in jedem Punkt der Wurfbahn auf den Ball vertikal nach unten wirkt (wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt), ist die Gewichtskraft (allgemeiner: Gravitationskraft).

Teste dein Wissen 8:

Auf einen Körper wirken gleichzeitig Kräfte von 3 N und von 4 N ein. Die Kräfte schließen miteinander einen Winkel von 90° ein. Bestimme die gesamte wirkende Kraft und kreuze die richtige Antwort an.

- a) 3 N
- b) 5 N
- c) 4 N
- d) 7 N



Antwort:

Die richtige Antwort ist b) 5 N.

Wenn zwei Kräfte auf einen Körper wirken und einen Winkel von 90° zueinander haben, dann kann die resultierende Kraft durch den Satz des Pythagoras berechnet werden. In diesem Fall sind die beiden Kräfte die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks und die gesamte wirkende Kraft ist die Hypotenuse. Daher gilt:

$$F_{ges} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ N}$$

Rechenaufgabe 1:

Die Beschleunigung bei verschiedenen Autos kann stark variieren.

- a) Ein Auto (m = 900 kg) benötigt 11 s, um aus dem Stand auf 80 km/h zu kommen.

 Bestimme die durchschnittliche Beschleunigung und die durchschnittliche Kraft des Motors.
- b) Bestimme dieselben Werte für das folgende E-Auto: m = 2 000 kg, das E-Auto benötigt 6,1 s, um aus dem Stand auf 100 km/h zu kommen.

Antwort:

a)

Die durchschnittliche Beschleunigung eines Autos kann mit der Formel berechnet werden:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

(Δv... Geschwindigkeitsänderung, Δt... Zeitdauer)

Die Geschwindigkeit muss zuerst in m/s umgerechnet werden: $\Delta v = 80 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 22,22 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Daher ist die durchschnittliche Beschleunigung:

$$a = \frac{22,22\frac{\text{m}}{\text{s}}}{11\text{ s}} \approx 2,02\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die durchschnittliche Kraft des Motors kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$F = m \cdot a = 900 \text{ kg} \cdot 2,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1818 \text{ N}$$

b)

Für das E-Auto ist $\Delta v = 100 \frac{km}{h} \approx 27,78 \frac{m}{s}$

Daher ist die durchschnittliche Beschleunigung:

$$a = \frac{27,78 \frac{m}{s}}{6.1 s} \approx 4,55 \frac{m}{s^2}$$

Die durchschnittliche Kraft des Motors beträgt dann:

$$F = 2000 \text{ kg} \cdot 4,55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 9 \text{ 100 N}$$

Rechenaufgabe 2:

Bei Crashtests wird mit Dummys untersucht, welche Kraft bei einem Frontalzusammenstoß auf den Sicherheitsgurt wirkt. Dabei wird das Auto in 0,25 s aus einer Geschwindigkeit von 64 km/h zum Stillstand gebracht. Der Dummy hat eine Masse von 60 kg.

- a) Bestimme die Kraft, die auf den Gurt wirkt.
- b) Analysiere, ob eine Gefahr besteht, wenn man sich mit den Armen am Lenkrad abstützt, statt einen Sicherheitsgurt zu verwenden.

Antwort:

a)

Die Geschwindigkeit muss zuerst in m/s umgerechnet werden: $\Delta v = 64 \frac{km}{h} \approx 17,78 \frac{m}{s}$

Die Kraft, die auf den Gurt wirkt, kann mit der Formel berechnet werden:

$$F = m \cdot a$$

Um die Kraft, die auf den Dummy wirkt, zu bestimmen, müssen wir zuerst die Beschleunigung, die dieser erfährt, berechnen:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{17,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,25 \text{ s}} \approx -71, 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die negative Beschleunigung zeigt an, dass es sich um eine Bremsbeschleunigung handelt. Die Kraft ist dann:

$$F = 60 \text{ kg} \cdot \left(-71.1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = -4266 \text{ N}$$

Das entspricht dem 7,25-fachen Gewicht!

b)

Es besteht allerdings Gefahr, denn wenn man sich mit den Armen am Lenkrad abstützt, müsste man mindestens das Siebenfache der Gewichtskraft aufbringen können, um schwere Verletzungen zu vermeiden. Daher ist es sicherer, einen Sicherheitsgurt zu verwenden, da dieser dazu dient, den Körper während eines Unfalls zurückzuhalten und die Belastung auf den Körper zu reduzieren.

Rechenaufgabe 3:

An eine Schraubenfeder mit der Federkonstante k = 10 N/m wird ein Körper der Masse m = 60 g gehängt.

- a) Ermittle die Dehnung der Feder auf der Erde.
- b) Wie groß wäre die Dehnung auf dem Mond? Vergleiche.

Antwort:

a)

Die Federkraft wirkt der Dehnung entgegen, weshalb die Dehnung die durch die Gewichtskraft \mathbf{F} erzeugt wird, das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt:

$$x = \frac{F}{k}$$
 (wobei $F = m \cdot g$)

 $(x \dots \text{Federdehnung}, k \dots \text{Federkonstante}, F \dots \text{Gewichtskraft})$

Daraus folgt:

$$x = 0.06 \text{ kg} \cdot \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{10 \text{ N/m}} \approx 0.0589 \text{ m} = 5.89 \text{ cm}$$

b)

Auf dem Mond ist die Gravitationsbeschleunigung:

$$g = 1,62 \frac{m}{s^2}$$

Daher ist

$$x = 0.06 \text{ kg} \cdot \frac{1.62 \text{ m/s}^2}{10 \text{ N/m}} \approx 0.0097 \text{ m} = 9.7 \text{ mm}$$

Die Dehnung auf dem Mond wäre mit 9,7 mm also etwa sechs Mal kleiner als auf der Erde.

Rechenaufgabe 4:

Der mittlere Steigungswinkel der Bergisel-Schanze (43.2) beträgt rund 29°, die Höhendifferenz rund 50 m

Ermittle die Endgeschwindigkeit der Sportlerinnen und Sportler in der Anlaufspur.

Antwort:

Die Endgeschwindigkeit v_{End} der Sportlerinnen und Sportler in der Anlaufspur kann mit der Formel berechnet werden:

$$v_{End} = \sqrt{2 g \cdot h}$$
 (g ... Erdbeschleunigung, h ... Höhendifferenz)

Wir setzen die gegebenen Werte ein und erhalten:

$$v_{End} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m}} \approx 31.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 112.7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Bei einer Höhendifferenz h = 50m in der Anlaufspur ergibt sich somit eine Endgeschwindigkeit von ungefähr 113 km/h.

Zusatz: Die Reibung der Schier in der Spur und der Luftwiderstand verringern die Endgeschwindigkeit. Aus Sicherheitsgründen soll die Absprunggeschwindigkeit nicht wesentlich mehr als 90 km/h betragen, weshalb der Anlauf meist verkürzt wird.

2 Drittes Newton'sches Gesetz, S. 49

Teste dein Wissen 1:

Formuliere das Gravitationsgesetz mit eigenen Worten.

Beispielantwort:

Die Masse von Körpern erzeugt eine Anziehungskraft zwischen ihnen, welche auch als Gravitationskraft bekannt ist. Warum die Masse diese Anziehungskraft erzeugt, wissen wir bis heute noch nicht genau. Aber wir wissen, wie die Anziehungskraft zwischen zwei Körpern von deren Massen und dem Abstand zwischen ihnen abhängt.

Die Gewichtskraft, mit der die Erde einen Körper anzieht, ist proportional zur Masse des Körpers. Nach dem Wechselwirkungsgesetz zieht auch der Körper die Erde an. Daraus folgt, dass die Anziehungskraft zwischen zwei Körpern mit Massen m_1 und m_2 proportional zu $m_1 \cdot m_2$ sein muss. Newton nutzte diese Erkenntnis und das dritte Kepler'sche Gesetz zur Herleitung der Abstandsabhängigkeit.

Das Gravitationsgesetz wurde demnach wie folgt definiert:

$$F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Die Gravitationskonstante G bestimmt, wie groß die Kräfte sind, mit denen Massen einander anziehen und hat den Wert:

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Wegen des kleinen Werts der Gravitationskonstanten ist die Gravitationskraft im Alltag nur in Zusammenhang mit großen Massen, wie etwa der Erde, von Bedeutung. Allerdings ist die Gravitationskraft auch wichtig für das Verständnis der Entwicklung und den Aufbau der Sterne, Galaxien und das ganze uns bekannte Universum.

Teste dein Wissen 2:

Ordne dem allgemeinen Wechselwirkungsgesetz eine der Aussagen zu:

- a) Jeder Körper, auf den eine Kraft einwirkt, ändert seine Form.
- b) Wirkt ein Körper mit einer Kraft auf einen anderen Körper, so wirkt dieser Körper mit der gleichen Kraft auf den ersten Körper zurück.
- c) Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so ändert der Körper seine Position.

Antwort:

Das allgemeine Wechselwirkungsgesetz, auch bekannt als das dritte Newtonsche Gesetz, besagt, dass jede Aktion eine gleich große, aber entgegengesetzte Reaktion hervorruft (actio = reactio). Daher ist Aussage b) richtig: "Wirkt ein Körper mit einer Kraft auf einen anderen Körper, so wirkt dieser Körper mit der gleichen Kraft auf den ersten Körper zurück." Dieses Gesetz erklärt die entgegengesetzten Kräfte, wenn z.B. zwei Personen auf Skateboards an

beiden Enden eines gespannten Seils ziehen und sich dabei gegenseitig anziehen. Es ist ein grundlegendes Prinzip in der Physik und gilt für alle Arten von Kräften und Interaktionen.

Teste dein Wissen 3:

Galilei, Kepler, Newton gelten als Wegbereiter der Physik. Nenne ihre Leistungen.

Beispielantwort:

Galileo Galilei:

- Er entwickelte neue wissenschaftliche Methoden zur Untersuchung der Phänomene der Natur, die auf geometrische sowie mathematische Analysen von Experimenten und Hypothesen basierten und nicht nur auf philosophischen Theorien.
- Er revolutionierte viele Bereiche der Wissenschaft, insbesondere die Studien der Bewegung, Astronomie und Materialien.
- Er verbesserte das Teleskop und machte verschiedene astronomische Beobachtungen.
- Er formulierte die ersten drei Prinzipien der Bewegung. (Trägheitsprinzip, Freier Fall, Relativitätsprinzip)

Johannes Kepler:

- Er definierte drei wichtige Gesetze der Planetenbewegung, die als Keplersche Gesetze bekannt sind, und konnte damit auch die elliptischen Planetenbahnen erklären.
- Er war der erste, der bewies, dass die Gezeiten des Ozeans auf die Schwerkraft des Mondes zurückzuführen sind.
- Er prägte das Wort "Satellit" (lat. *satelles*). Er schlug vor, dass die Sonne um ihre Achse rotiert und sich andere Himmelskörper (wie Planeten) wie Satelliten um die viel massereichere Sonne bewegen.

Isaac Newton:

- Er entdeckte die Zusammensetzung des weißen Lichts sowie dessen Teilcheneigenschaft und legte damit den Grundstein für die moderne physikalische Optik.
- Er analysierte sowohl die Planetenbewegung als auch die universelle Gravitation.
- Er formulierte drei grundlegende Gesetze der Bewegung (bzw. Mechanik), die die Grundprinzipien der modernen Physik darstellen.
- Seine Arbeit "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" war eines der wichtigsten Einzelwerke in der Geschichte der modernen Wissenschaft.

Rechenaufgabe 1:

Überprüfe die Maßeinheit der Gravitationskonstante.

Antwort:

Gehen wir vom Gravitationsgesetz aus und formen die Formel nach ${\it G}$ um:

$$F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \rightarrow G = \frac{F_G \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2}$$

Nun schreiben wir die Einheiten der einzelnen Größen aus:

$$[G] = \frac{\mathbf{N} \cdot \mathbf{m}^2}{\mathbf{k} \mathbf{g}^2}$$

Rechenaufgabe 2:

Ermittle die Höhe, in der das Gewicht eines Körpers nur noch ein Viertel seines Wertes auf der Erdoberfläche beträgt. ($m_F = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, r_F = 6370 \text{ km}$)

Antwort:

Um die Höhe zu berechnen, in der das Gewicht eines Körpers nur noch ein Viertel seines Wertes auf der Erdoberfläche beträgt, können wir das Gravitationsgesetz von Newton verwenden. Das Gewicht eines Körpers auf der Erdoberfläche ist gegeben durch

$$F_G(r_E) = G \frac{m \cdot m_E}{r_E^2}$$

(m... Masse des Körpers, $m_E...$ Masse der Erde, $r_E...$ Radius der Erde)

Wenn das Gewicht des Körpers nur noch ein Viertel seines Wertes auf der Höhe $r'=r_E+h$ beträgt, können wir die neue Gleichung mit dem Radius r' aufstellen und die rechte Seite mit dem Viertel der Gewichtskraft auf der Erdoberfläche gleichsetzen:

$$F_G(r') = \frac{F_G(r_E)}{4} \rightarrow G \frac{m \cdot m_E}{r'^2} = G \frac{m \cdot m_E}{4 \cdot r_E^2}$$

Nun lösen wir nach r' auf:

Wir heben zuerst den Term ${\it G}\cdot {\it m}\cdot {\it m}_{\it E}$ heraus, lösen nach r'^2 auf und ziehen dann die Wurzel:

$$\frac{1}{r'^2} = \frac{1}{4r_E^2} \Rightarrow r' = 2r_E = r_E + h$$

Da wir die Höhe $m{h}$ über der Erdoberfläche suchen, müssen wir den Erdradius von $m{r}'$ abziehen, also ist die gesuchte Höhe:

$$h = r' - r_E = 2r_E - r_E = r_E = 6 370 \text{ km}$$

Also ist die Höhe, in der das Gewicht eines Körpers nur noch ein Viertel seines Wertes auf der Erdoberfläche beträgt, gleich dem Erdradius von 6 370 km über der Erdoberfläche.

Diese Annäherung geht davon aus, dass die Erdoberfläche selbst eine Entfernung von einem Erdradius zum Erdmittelpunkt hat.

Rechenaufgabe 3:

Bestimme die gravitative Anziehung zwischen zwei Personen mit der Masse von je 80 kg im Abstand von 1m.

Antwort:

Die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern kann mit dem Gravitationsgesetz von Newton berechnet werden, das lautet:

$$F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Dabei ist $m_1=m_2=80~{
m kg}$ die Masse der zwei Personen, $G\approx 6$, $67\cdot 10^{-11}~{{
m N\cdot m^2}\over{
m kg^2}}$ die

Gravitationskonstante und $r=1~\mathrm{m}$ der Abstand zwischen den Massezentren der beiden Körper.

Setzen wir die gegebenen Werte ein, dann ergibt sich für die Gravitationskraft:

$$F = 6.67 \cdot 10^{-11} \; \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{80 \; \text{kg} \cdot 80 \; \text{kg}}{(1 \; \text{m})^2} \; \approx \, \textbf{4.27} \cdot \textbf{10}^{-7} \; \textbf{N}$$

Die Gravitationskraft zwischen den beiden Personen beträgt also etwa $4,27\cdot 10^{-7}$ Newton. Das ist eine sehr kleine Kraft, die im Alltag nicht spürbar ist.

Rechenaufgabe 4:

Der nächste Fixstern, Alpha Centauri, ist von der Sonne 4,3 Lichtjahre entfernt und hat eine Masse von ca. $4 \cdot 10^{30}$ kg. Die Masse der Sonne beträgt ca. $2 \cdot 10^{30}$ kg. Ermittle die Gravitationskraft zwischen diesen beiden Sternen.

Antwort:

Die Gravitationskraft zwischen den zwei Sternen kann mit dem Gravitationsgesetz von Newton berechnet werden:

$$F_G = G \frac{m_A \cdot m_S}{r^2}$$

 $(m_A/m_S...$ Masse von **A**lpha Centauri / der **S**onne, r... Entfernung: Alpha C. - Sonne)

Die Entfernung muss in Metern angegeben werden, um die Einheiten konsistent zu halten. 4,3 LJ $\approx 4,07 \cdot 10^{16}$ m $(1 \text{ LJ} \approx 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m})$ Setzen wir die gegebenen Werte ein:

$$F_G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{(4 \cdot 10^{30} \text{ kg}) \cdot (2 \cdot 10^{30} \text{ kg})}{(4.07 \cdot 10^{16} \text{ m})^2} \approx 3.2 \cdot 10^{17} \text{ N}$$

Die Gravitationskraft zwischen diesen beiden Sternen beträgt somit in etwa $3, 2 \cdot 10^{17}$ N. Beachte, dass diese Berechnung eine Vereinfachung ist und tatsächliche Werte aufgrund anderer Faktoren wie der Bewegung der Sterne und der Anziehungskraft anderer Objekte abweichen können.

Rechenaufgabe 5:

Bestimme die Fallbeschleunigung in einer Höhe von 10 000 km über der Erdoberfläche.

Antwort:

Als Ansatzpunkt nehmen wir die Gravitationskraft F_G her. Da wir lediglich an der Fallbeschleunigung g interessiert sind, können wir durch die Masse des fallenden Objekts dividieren.

$$\frac{F_G}{m_O} = g' = G \; \frac{m_E}{r'^2}$$

 $(m_E/m_Q...$ Erd-/Objektmasse, g... Fallbeschleunigung, r'... Entfernung: Fallhöhe + Erdradius)

Oft kann man die Masse des fallenden Objekts ignorieren, da sie meist um ein Vielfaches kleiner ist als die Erdmasse. (Erwachsener Mensch ≈ 75 kg, $m_E \approx 5,972 \cdot 10^{24}$ kg) Entfernung zw. Erdmittelpunkt und Fallhöhe: $r' \approx 16\,370$ km = $1,637 \cdot 10^7$ m Setzen wir nun die Werte in die Formel ein:

(Achte hierbei auf die Einheiten, denn 1 N = $1\frac{kg\cdot m}{s^2} \rightarrow 1\frac{N\cdot m^2}{kg^2} = 1\frac{m^3}{kg\cdot s^2}$)

$$g' = G \frac{m_E}{r'^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(1,637 \cdot 10^7 \text{ m})^2} \approx 1,49 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Die Fallbeschleunigung auf 10 000 km Höhe beträgt somit etwa 1,49 m/s².

Rechenaufgabe 6:

Im Roman "Alice im Wunderland" fällt Alice in ein Kaninchenloch. Das Loch führt durch den Mittelpunkt der Erde und endet auf der anderen Seite der Erdkugel. Erörtere aus physikalischer Sicht, was mit Alice passiert. Nimm bei deinen Überlegungen an, dass die Erde eine homogene Kugel ist.

Antwort:

Es wird eine, auch im Inneren, feste Erde vorausgesetzt. Alice fällt und beschleunigt Richtung Erdmittelpunkt, wobei die Beschleunigung laufend abnimmt. Wegen der Trägheit bleibt sie im Erdmittelpunkt nicht stehen, sondern steigt zur gegenüberliegenden Erdoberfläche auf. Dort hat sie wieder die Geschwindigkeit null. Nun kann das Spiel von vorn beginnen.

Um die Geradlinigkeit und Trägheit dieses Prozesses zu erhalten, sollte man allerdings auch mindestens zwei weitere Voraussetzungen annehmen:

Neben dem, dass man annimmt die Erde sei eine homogene Kugel, sollte man ebenfalls den Luftwiderstand und die Rotation der Erde ignorieren dürfen.

Wenn man dies nicht voraussetzt, dann ist der Prozess aufgrund des Luftwiderstands gedämpft und aufgrund der Erdrotation kommt die sogenannte Corioliskraft ins Spiel. Was bedeutet, dass Alice in dem Fall immer langsamer und nicht geradlinig durch die Erde fallen würde und somit irgendwann im Mittelpunkt zum Stillstand kommen würde.

Rechenaufgabe 7:

a) Ein Lift fährt nach oben. Beim Anfahren wird die Liftkabine beschleunigt, dann fährt sie mit konstanter Geschwindigkeit und wird schließlich abgebremst. Bestimme die Kraft, die eine Person (m = 70 kg, $a = 2,5 \text{m/s}^2$) beim Anfahren auf den Boden der Liftkabine ausübt.

b) Nimm eine Waage und überprüfe die Richtigkeit deiner Überlegung.

Antwort:

Um die gesamte Kraft (Anziehungskraft F_G + Beschleunigungskraft F) zu berechnen, können wir das zweite Newtonsche Gesetz verwenden:

$$F_{ges} = F_G + F = m \cdot g + m \cdot a = m(g + a)$$

Berechnung:

$$F_G + F = m(g + a) = 70 \text{ kg} \cdot \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 861.7 \text{ N}$$

Die Kraft, die eine Person beim Anfahren auf den Boden der Liftkabine ausübt, beträgt insgesamt 861,7 Newton.

Rechenaufgabe 8:

Bestimme die Masse jener Menge Wasser, die auf dem Mond ein Gewicht von 10 N hätte. (Die Fallbeschleunigung auf dem Mond beträgt 1,62 m/s²). Vergleiche die Zahl mit jener auf der Erde!

Antwort:

Um die Masse des Wassers zu bestimmen, das auf dem Mond eine Gewichtskraft F von 10 N hätte, müssen wir zuerst die Formel nach der Masse des Wasser m_W umstellen:

$$m_W = \frac{F}{g}$$

Wobei ${\it g}$ die Fallbeschleunigung auf dem Mond bzw. der Erde ist.

Nun setzen wir die Werte für den Mond als auch für die Erde ein:

$$m_{W(M)} = \frac{F}{g_M} = \frac{10 \text{ N}}{1,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 6,17 \text{ kg}$$

$$m_{W(E)} = \frac{F}{g_E} = \frac{10 \text{ N}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 1,02 \text{ kg}$$

Die Masse des Wassers, das auf dem Mond ein Gewicht von 10 N hätte, beträgt ungefähr 6,17 kg, während die Masse auf der Erde etwa 1,02 kg beträgt. Beachte, dass die Masse auf dem Mond höher ist, da die Fallbeschleunigung dort geringer ist als auf der Erde. Die Masse ist somit indirekt proportional zur Fallbeschleunigung.

3 Der Einfluss der Reibung, S. 53

Teste dein Wissen 1:

Ein Körper gleitet über eine raue Fläche. Ordne die richtige Aussage zu:

- a) Die Reibung ist größer, wenn die Bewegung langsam abläuft.
- b) Die Reibung ist größer, wenn das Gewicht größer ist.
- c) Die Reibung ist größer, wenn die Auflagefläche größer ist.

Antwort:

Die richtige Aussage ist b) Die Reibung ist größer, wenn das Gewicht größer ist.

Die Reibungskraft zwischen zwei Oberflächen hängt von mehreren Faktoren ab, aber einer der wesentlichen Faktoren ist das Gewicht des Körpers. Je größer das Gewicht des Körpers, desto größer ist die Normalkraft, die zwischen den Oberflächen wirkt und somit die Reibungskraft erhöht. Die Reibung zwischen den Oberflächen ist direkt proportional zur Normalkraft, die wiederum vom Gewicht des Körpers abhängt: (z.B. die Gewichtskraft)

$$F=f\cdot F_N$$
 ($F...$ Reibungskraft, $f...$ Gleitreibungszahl, $F_N...$ Normalkraft)

Teste dein Wissen 2:

Frau Meier bremst ihr Auto so stark ab, dass die Räder blockieren. Welche Aussagen treffen zu? Kreuze die richtigen Aussagen an.

- a) Der Bremsweg ist größer als bei einem normalen Bremsmanöver.
- b) Der Bremsweg ist kleiner als bei einem normalen Bremsmanöver.
- c) Der Bremsweg ist unabhängig vom Gewicht des Autos.

Antwort:

Aussage a) ist richtig. Blockieren die Räder beim Bremsvorgang ("Blockierbremsung"), so ist die kleinere Gleitreibungszahl $f_G=0.1$ (Eis) bis 0.4 (nasser Asphalt) einzusetzen. Der Bremsweg verlängert sich aufgrund der kleineren Reibung. Viel schlimmer ist jedoch, dass keine Kräfte zum Lenken von der Fahrbahn auf das Fahrzeug übertragen werden, das Fahrzeug unlenkbar ist und in einer Kurve tangential rutscht.

Aussage b) ist falsch. Siehe a)

Aussage c) ist falsch. Der Bremsweg und die Reibung eines Autos hängen von verschiedenen Faktoren ab, einschließlich dem Gewicht des Autos. Ein schwereres Auto hat mehr kinetische Energie als ein leichteres Auto bei der gleichen Geschwindigkeit und damit eine höhere Trägheit. Es braucht mehr Bremskraft, um diese Energie abzubauen. Daher ist der Bremsweg eines schwereren Autos (v.a. bei der Blockierbremsung) in der Regel länger als der eines leichteren

Autos, vorausgesetzt, alle anderen Bedingungen, wie Reifengröße, Reifenprofil, Anzahl an Reifen/Räder, Bremssysteme etc., sind gleich.

Teste dein Wissen 3:

Welche Rolle spielt die Reibung bei der Fortbewegung? Begründe deine Antwort.

- a) Sie ermöglicht die Fortbewegung.
- b) Sie behindert die Fortbewegung.

Antwort:

Die Reibung spielt bei der Fortbewegung eine entscheidende Rolle und beide Aussagen können unter verschiedenen Umständen zutreffen:

- a) Sie ermöglicht die Fortbewegung: Das ist richtig. Ohne Reibung könnten wir uns nicht fortbewegen. Wenn du zum Beispiel gehst oder läufst, dann schiebst du einen Fuß nach hinten und die Reibung zwischen deinem Schuh und dem Boden verhindert, dass dein Fuß rutscht. Diese Reibungskraft ermöglicht es, sich vorwärts zu bewegen. Ähnlich verhält es sich bei Fahrzeugen: Die Reibung zwischen den Reifen und der Straße ermöglicht es dem Fahrzeug, sich vorwärts zu bewegen.
- b) Sie behindert die Fortbewegung: Das ist auch richtig, aber in einem anderen Kontext. Während die Reibung die Fortbewegung ermöglicht, wirkt sie gleichzeitig auch entgegen der Bewegungsrichtung und bremst das Objekt ab. Wenn du zum Beispiel mit dem Fahrrad fährst und aufhörst zu treten, dann reduziert die Reibung zwischen den Reifen und der Straße sowie die Luftreibung gegen die Fahrtrichtung deine Fahrgeschwindigkeit.

Zusatz: Insgesamt ist die Reibung also ein zweischneidiges Schwert: Sie ist notwendig für die Fortbewegung, kann aber auch die Bewegung behindern. Bei der Gestaltung von Fortbewegungssystemen ist es daher oft ein Ziel, die Reibung dort zu maximieren, wo sie zur Fortbewegung benötigt wird (z.B. zwischen Reifen und Straße), und sie zu minimieren, wo sie die Bewegung behindert (z.B. durch aerodynamisches Design zur Reduzierung der Luftreibung).

Rechenaufgabe 1:

Berechne die Grenzgeschwindigkeit für kleine Regentropfen (r = 1 mm). Ermittle die Zeit, die die Tropfen aus einer Wolke in 1 000 m Höhe mindestens auf ihrem Weg zur Erde brauchen.

$$(\rho_{\text{Luft}} = 1.2 \, \frac{kg}{m^3})$$

Antwort:

Um die Grenzgeschwindigkeit v_G zu bestimmen nutzen wir die Formel für kugelförmige Objekte: (Herleitung auf Seiten 52+53)

$$v_{G} = \sqrt{\frac{2m \cdot g}{c_{W} \cdot A \cdot \rho_{L}}} = \sqrt{\frac{8r \cdot g \cdot \rho_{K}}{3c_{W} \cdot \rho_{L}}} \quad (wobei \ m = \frac{1}{3}(4\pi \cdot \rho_{K} \cdot r^{3}) \ und \ A = \pi \cdot r^{2})$$

(A... Querschnitt des Körpers, m... Körpermasse, g... Fallbeschleunigung, $ho_L...$ Luftdichte, ho_K ... Körperdichte, c_W ... (Strömungs-)Widerstandskoeffizient)

Durch Einsetzen von
$$r=10^{-3}\ m;\ \rho_{K}\approx 1000\frac{kg}{m^{3}};\ c_{W}\approx 0,25;\ \rho_{Luft}=1,2\frac{kg}{m^{3}}$$
 erhält man:
$$v_{G}=\sqrt{\frac{8\cdot 10^{-3}\ m\cdot 9,81\frac{m}{s^{2}}\cdot 1000\frac{kg}{m^{3}}}{3\cdot 0,25\cdot 1,2\frac{kg}{m^{3}}}}\approx 9,34\frac{m}{s}\approx 33,6\frac{km}{h}}$$

Regentropfen mit einem Radius von 1mm fallen mit einer Maximalgeschwindigkeit von etwa 33,6 km/h. Da ein Teil der Strecke mit $v < v_G$ durchfallen wird, ist die Fallzeit: $t > \frac{1\,000\,m}{9.34\,m/s} \approx 107,1\,\mathrm{s}$

4 Spezielle Bewegungsformen, S. 65

Teste dein Wissen 1:

Ein Kind wirft einen Ball nach oben. Ermittle die Beschleunigung am höchsten Punkt der Wurfbahn. Kreuze die richtige Antwort an.

- a) Die Beschleunigung ist 0.
- b) Die Beschleunigung ist 9,81 m/s².
- c) Die Beschleunigung ist kleiner als 9,81 m/s²

Antwort:

Die richtige Antwort ist b) 9,81 m/s².

Der Ball hat zwar die Geschwindigkeit null, doch wird er während der gesamten Flugzeit von der Erde angezogen, erfährt also die Fallbeschleunigung g. Andernfalls würde er in der Luft stehen bleiben.

Teste dein Wissen 2:

Ein Ball wird horizontal geworfen. Was gilt für die Wurfweite, wenn man die Abwurfhöhe h 4-mal so groß macht. Kreuze die richtige Antwort an.

- a) Die Wurfweite halbiert sich.
- b) Die Wurfweite verdoppelt sich.
- c) Die Wurfweite bleibt gleich.

Antwort:

Die richtige Antwort ist b) Die Wurfweite wird verdoppelt.

Die Wurfweite eines horizontal geworfenen Balls hängt nur von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und der Abwurfhöhe h ab. Der Körper bewegt sich für die gesamte Wurfdauer, die gleich der Fallzeit beim freien Fall ist, gleichförmig horizontaler. In dieser Zeit t legt der Körper den Weg s_W (Wurfweite) zurück:

$$s_W = v_0 \cdot t$$

Die Fallzeit und damit die Wurfdauer $oldsymbol{t}_W$ hängt nur von der Abwurfhöhe $oldsymbol{h}$ ab. Dabei gilt:

$$h = \frac{1}{2}g \cdot t_W^2$$

Umgestellt nach t_W ergibt sich:

$$t_W = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Die Zeit bis zum Aufprall verhält sich somit direkt proportional mit der Wurzel der Erhöhung der Abwurfhöhe. Setzen wir nun t_W in die Formel der Wurfweite s_W ein und setzen $h \to 4h$:

$$s_W = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4h}{g}} = 2 \cdot v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2 \cdot v_0 \cdot t_W$$

Bei vierfacher Abwurfhöhe ist die Fallzeit und die Wurfweite somit doppelt so groß.

Teste dein Wissen 3:

Ein Ball wird von einem hohen Turm senkrecht nach unten geworfen. Eine halbe Sekunde später wird ein zweiter Ball fallen gelassen. Nimm an, die Luftreibung spiele keine Rolle und wähle die korrekte Aussage aus.

- a) Der Abstand zwischen den Bällen nimmt zu.
- b) Der Abstand zwischen den Bällen nimmt ab.
- c) Der Abstand zwischen den Bällen bleibt konstant.

Antwort:

Die richtige Antwort ist a) Der Abstand zwischen den Bällen nimmt zu.

Es gilt für den ersten Ball:

$$s_1 = \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

und für den zweiten Ball:

$$s_2 = \frac{1}{2}g \cdot (t - 0, 5)^2$$

Berechnen wir die Wegdifferenz:

$$\Delta s = s_1 - s_2 = \frac{1}{2}g \cdot (t - 0, 25)$$

Die Wegdifferenz nimmt also mit der Zeit zu.

Teste dein Wissen 4:

Zeichne die Bahnkurve eines Balls, der schräg nach oben unter einem Winkel von etwa 45° geworfen wird. Zeichne alle Kräfte ein, die auf den Ball wirken.

Antwort:

Die Bahnkurve eines unter einem Winkel von etwa 45° geworfenen Balls ist eine Parabel. Die einzige Kraft, die auf den Ball während des Flugs wirkt (wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt), ist die Gravitationskraft, die vertikal nach unten wirkt.

Teste dein Wissen 5:

Du fährst mit gleicher Geschwindigkeit $_{Illustration: \ Bernd \ Pavlik, \ Neusiedl \ am \ See}$ durch eine Kurve mit kleinem Radius und durch eine Kurve mit großem Radius. Kreuze die richtige Antwort an. Die Zentripetalbeschleunigung a_Z

- a) ist in beiden Kurven gleich.
- b) ist in der Kurve mit großem Kurvenradius größer als in der Kurve mit kleinem Kurvenradius.
- c) ist in der Kurve mit großem Kurvenradius kleiner als in der Kurve mit kleinem Kurvenradius.

Antwort:

Die Zentripetalbeschleunigung a_Z wird durch die Formel $a_Z=\frac{v^2}{r}$ gegeben, wobei v die konstante Geschwindigkeit und r der Radius der Kurve ist. Bei gleicher Geschwindigkeit bedeutet ein kleinerer Radius eine größere Zentripetalbeschleunigung. Also ist die Antwort c) richtig: Die Zentripetalbeschleunigung ist in der Kurve mit großem Kurvenradius kleiner als in der Kurve mit kleinem Kurvenradius.

Zusatz: Ist die Reibung, die die Zentripetalbeschleunigung liefert, nicht ausreichend groß, ist die Gefahr aus einer "engen" Kurve "heraus zu fliegen" wesentlich größer.

Teste dein Wissen 6:

Welche Richtung hat die Winkelgeschwindigkeit? Kreuze die richtige Antwort an.

- a) Sie ist kein Vektor, sie hat keine Richtung.
- b) Sie hat die gleiche Richtung wie die Bahngeschwindigkeit.
- c) Sie steht senkrecht zur Bahngeschwindigkeit.

Antwort:

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist ein Vektor, der senkrecht zur Bahnebene bzw. zur Ebene der Rotation steht und die Drehrichtung mittels der "Rechte-Hand-Regel" angibt. **Die Antwort ist daher: c) Sie steht senkrecht zur Bahngeschwindigkeit.**

Zusatz: Für die Ermittlung der Richtung der Winkelgeschwindigkeit gilt folgende Regel: Drehe einen Korkenzieher oder eine Schraube im Uhrzeigersinn. Die Richtung, in die der Korkenzieher bzw. die Schraube zeigt, entspricht der dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit.

Teste dein Wissen 7:

Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\pmb{\omega}$ und der Bahngeschwindigkeit \pmb{v} .

```
a) \omega = v \cdot r
b) \omega = v/r
```

c)
$$\omega = 2\pi \cdot v$$

Antwort:

Der Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω und der Bahngeschwindigkeit v ist durch die Formel $\omega=\frac{v}{r}$ gegeben, wobei r der Radius der Kreisbahn ist. Wichtig ist zu beachten, dass es sich hierbei um den Betrag der Winkelgeschwindigkeit handelt. **Also ist die richtige Antwort:** b) $\omega=v/r$

Teste dein Wissen 8:

Beschreibe den Zusammenhang zwischen Frequenz und Winkelgeschwindigkeit. Kreuze die richtige Antwort an.

```
a) f = 2\pi \cdot \omega
```

b)
$$f = 2\pi/\omega$$

c)
$$f = \omega/(2\pi)$$

Antwort:

Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ω ist mit der Frequenz f durch die Formel $\omega=2\pi\cdot f$ verknüpft, wobei die Frequenz f die Zahl der vollständigen Umläufe pro Sekunde ist. **Umgestellt nach f ergibt sich: c)** $f=\omega/(2\pi)$

Teste dein Wissen 9:

Erkläre die Bewegung der Erde um die Sonne mittels der Kepler'schen Gesetze.

Antwort:

Die Bewegung der Erde um die Sonne wird durch die drei Kepler'schen Gesetze beschrieben:

- Erstes Kepler'sches Gesetz: Die Umlaufbahn der Erde um die Sonne ist eine Ellipse, mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte der elliptischen Bahn.
- **Zweites Kepler'sches Gesetz:** Der von der Sonne zur Erde gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- **Drittes Kepler'sches Gesetz:** Das Quadrat der Umlaufzeit (Orbitalperiode T) der Erde um die Sonne ist proportional zum Kubus der großen Halbachse (mittlere/r Entfernung/Radius r) ihrer elliptischen Umlaufbahn. $T_1^2: T_2^2 = r_1^3: r_2^3$

Diese Gesetze erklären, dass die Erde sich in einer elliptischen Bahn um die Sonne bewegt, nicht in einer perfekten Kreisbahn, und dass ihre Geschwindigkeit variiert, je nachdem, wie nahe sie der Sonne ist.

Teste dein Wissen 10:

Definiere die Daten, die du über die Erde benötigst, um die Masse der Sonne zu berechnen.

Antwort:

Um die Masse der Sonne zu berechnen, benötigen wir die folgenden Daten über die Erde:

- Die große Halbachse r der elliptischen Umlaufbahn der Erde (mittlerer Bahnradius).
- Die Umlaufzeit T der Erde um die Sonne (ein Jahr).
- Die Gravitationskonstante G.

Mit diesen Daten kann die Masse der Sonne durch das dritte Kepler'sche Gesetz und das Gravitationsgesetz nach Newton berechnet werden:

$$M=\frac{4\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2}$$

Rechenaufgabe 1:

Bestimme die Winkelgeschwindigkeiten

- a) des Sekundenzeigers,
- b) des Minutenzeigers und
- c) des Stundenzeigers einer Uhr

Antwort:

Die Winkelgeschwindigkeit ω kann mit der Formel berechnet werden:

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

 $\Delta \phi$ ist die Winkeländerung bzw. der Winkel, der von einem zum Kreismittelpunkt gezogenen Radius überstrichen wird und Δt die dafür benötigte Zeit.

a) Sekundenzeiger einer Uhr: Der Sekundenzeiger einer Uhr vollführt eine komplette Umdrehung (360°) in 60 Sekunden. Daher ist seine Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{2\pi}{60 \text{ s}} = \frac{\pi}{30} \text{ s}^{-1} \approx 0,1047 \text{ s}^{-1}$$

b) Minutenzeiger einer Uhr: Der Minutenzeiger benötigt 60 Minuten (oder 3600 Sekunden), um eine komplette Umdrehung zu vollführen. Seine Winkelgeschwindigkeit ist somit:

$$\omega = \frac{2\pi}{3600 \text{ s}} = \frac{\pi}{1800} \text{ s}^{-1} \approx 0,00175 \text{ s}^{-1}$$
The Stundenzeiger benötigt 12 Stunden (

c) Stundenzeiger einer Uhr: Der Stundenzeiger benötigt 12 Stunden (oder 43200 Sekunden), um eine komplette Umdrehung zu machen. Seine Winkelgeschwindigkeit ist daher:

$$\omega = \frac{2\pi}{43200 \, s} = \frac{\pi}{21600} \, s^{-1} \approx 0,000145 \, s^{-1}$$

Rechenaufgabe 2:

Die Erde führt zwei Drehbewegungen aus: Die Rotation um ihre Achse und den Umlauf um die Sonne. Bestimme die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten.

Antwort:

Die Winkelgeschwindigkeit berechnet sich als:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Rotation um die Achse:

Die Erde dreht sich einmal in 24 Stunden um ihre Achse.

Wir müssen die Stunden zuerst in Sekunden umwandeln:

$$T = 24 \cdot 3600 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

$$\omega_{Rotation} = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} \approx 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Umlauf um die Sonne:

Die Erde umrundet die Sonne in etwa 365 Tagen.

Wir müssen die Stunden zuerst in Sekunden umwandeln:

$$T = 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 31536000 \text{ s}$$

$$\omega_{Umlauf} = \frac{2\pi}{31\,536\,000\ s} \approx 1,99 \cdot 10^{-7} \, s^{-1}$$

Rechenaufgabe 3:

Der Mond bewegt sich annähernd auf einer Kreisbahn (r = 384 000 km) um die Erde und benötigt dafür ungefähr 28 Tage. Ermittle die Bahngeschwindigkeit und die Beschleunigung in radialer Richtung.

Antwort:

Bahngeschwindigkeit:

Die Bahngeschwindigkeit berechnet sich mit Hilfe folgender Formel:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T}$$

(v... Bahngeschwindigkeit, r... Bahnradius, T... Umlaufzeit)

wobei $r = 3.84 \cdot 10^8$ m und $T = 28 \cdot 24 \cdot 3600$ s = 2 419 200 s.

Daraus folgt:

$$v = \frac{2\pi \cdot (3,84 \cdot 10^8 \text{ m})}{2,419,200 \text{ s}} \approx 997,33 \frac{m}{s}$$

Radiale Beschleunigung (Zentripetalbeschleunigung):

Die Zentripetalbeschleunigung lässt sich u.a. mit Hilfe folgender Formel berechnen:

$$a_Z = \frac{v^2}{r}$$

 $(a_z$... Radialbeschleunigung, v... Bahngeschwindigkeit, r... Bahnradius)

Daraus folgt:

$$a_Z = \frac{v^2}{r} \approx 2,59 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$

Damit beträgt die Bahngeschwindigkeit etwa 997,33 m/s und die (radiale) Zentripetalbeschleunigung etwa 2,59 · 10^{-3} m/s^2 .

Rechenaufgabe 4:

Eine Wäschetrommel dreht sich beim Schleudern 1 200-mal in der Minute. Bestimme die Beschleunigung, die ein Wassertropfen am Trommelrand erfährt, der von der Drehachse 24 cm entfernt ist. Vergleiche mit der Erdbeschleunigung g!

Antwort:

Die Zentrifugalkraft ist eine Trägheitskraft (Trägheitskräfte sind keine realen Kräfte, sondern werden lediglich für einfachere Berechnungen und Analysen als solche behandelt!), welche entgegen der Zentripetalkraft wirkt. Die Zentrifugalbeschleunigung lässt sich genauso wie die Zentripetalbeschleunigung u.a. mit Hilfe folgender Formel berechnen:

$$a_z = r \cdot \omega^2$$

Wobei man manchmal das Vorzeichen ändert, um die Wirkungsrichtung zu signalisieren. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega=2\pi\cdot f$ mit der Frequenz $f=\frac{1200}{60}s^{-1}=20$ s^{-1} (Hz) und r=0.24 m ergibt

$$\omega = 2\pi \cdot 20 \ s^{-1} \approx 125,66 \ s^{-1}$$

Daraus folgt:

$$a_Z = 0.24 \cdot (125,66 \, s^{-1})^2 \approx 3790 \, \frac{m}{s^2}$$

Die Zentrifugalbeschleunigung in der Wäschetrommel bei 1200 U/min (Umdrehungen pro Minute) kommt mit etwa 3790 m/s² annähernd an 400 g.

Rechenaufgabe 5:

Ermittle die Geschwindigkeit, mit der sich ein Ort am Äquator aufgrund der Erdrotation bewegt. Bestimme die Beschleunigung an diesem Ort. Um welchen Faktor wird das Gewicht eines Körpers dort kleiner als am Nordpol?

Antwort:

Die Geschwindigkeit kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}$$

Mit der Erdrotationsdauer $T=24\cdot 3600~\mathrm{s}=86400~\mathrm{s}$, der damit resultierenden Winkelgeschwindigkeit $\omega=2\pi/T\approx 7,27\cdot 10^{-5}~\mathrm{s}^{-1}$ und dem Erdradius $r=6~371~\mathrm{km}=6~371~000~\mathrm{m}$.

$$v = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cdot 6\,371\,000 \text{ m} \approx 463 \frac{m}{s}$$

Das Ergebnis setzen wir dann in die entsprechende Formel für die Beschleunigung ein:

$$a_Z = \frac{v^2}{r} = \frac{214369 \, m^2/s^2}{6371000m} \approx 0,034 \frac{m}{s^2}$$

Da die Erdbeschleunigung g am Nordpol etwa 9,83 m/s² beträgt, folgt dass die Beschleunigung durch die Erdrotation mit 0,034 m/s² ein Gewicht um den Faktor $1-a_Z/g=0$, 9965 verkleinert.

Rechenaufgabe 6:

Eine Milchkanne (m = 0.5 kg) wird in einem lotrechten Kreis mit dem Radius r = 1 m geschwungen. Bestimme die Geschwindigkeit, die im höchsten Punkt mindestens erreicht werden muss, damit keine Milch ausfließt.

Antwort:

Zur Bestimmung der Mindestgeschwindigkeit ist die Masse des Objekts nicht relevant, da sowohl die Zentrifugalkraft als auch die Gravitationskraft proportional zur Masse des Objekts sind. Setzen wir diese gleich $F_Z = F_G \to m \cdot v^2/r = m \cdot g$ können wir die Masse streichen. Im höchsten Punkt darf die Zentripetalbeschleunigung nicht kleiner als die Fallbeschleunigung sein: $v^2/r > g$

Die Mindestgeschwindigkeit beträgt somit:

$$v_{min} = \sqrt{g \cdot r}$$

mit $g = 9.81 \, m/s^2 \, \text{und} \, r = 1 \, m$.

Eingesetzt ergibt dies:

$$v_{min} = \sqrt{9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 1 m} \approx 3.132 \frac{m}{s}$$

Rechenaufgabe 7:

Berechne mit Hilfe des dritten Kepler'schen Gesetzes die Masse der Sonne.

Antwort:

3. Kepler'sches Gesetz:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

(M ... Masse der Sonne, G... Gravitationskonstante, T... Umlaufzeit (z.B. der Erde), r... große Halbachse (mittlerer Entfernung: Erde-Sonne))

Durch Umstellen der Formel und Einsetzen der bekannten Werte für die Umlaufzeit $T=365\cdot 24\cdot 3600~{\rm s}=31536000~{\rm s}$ der Erde, die große Halbachse $r\approx 1,5\cdot 10^{11}~{\rm m}$ und die Gravitationskonstante ${\it G}$ lässt sich ${\it M}$ berechnen:

$$M = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^3}{(6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}) \cdot (31\,536\,000\,\text{s})^2} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Die Masse der Sonne beträgt den Berechnungen zufolge somit etwa $2 \cdot 10^{30} \ \mathrm{kg}$.

5 Druck in Flüssigkeiten und Gasen, S. 71

Teste dein Wissen 1:

Kreuze die richtige Antwort an.

Die Druckeinheit 1 Pa entspricht

- a) 1 kg/cm²
- b) 1 N/m²
- c) 10 N/m²

Antwort:

Die richtige Antwort ist: b) 1 N/m²

Ein Pascal (Pa) ist definiert als der Druck, der durch eine Kraft von einem Newton gleichmäßig auf eine Fläche von einem Quadratmeter ausgeübt wird. Deshalb entspricht 1 Pascal genau 1 Newton pro Quadratmeter (1 N/m²). Diese Definition ist grundlegend für das Verständnis von Druckeinheiten im SI-System.

Teste dein Wissen 2:

Der normale Luftdruck

- a) ist wesentlich größer als 1 Pa.
- b) ist wesentlich kleiner als 1 Pa.
- c) entspricht dem Druck einer 1 m hohen Wassersäule.
- d) entspricht dem Druck einer 10 m hohen Wassersäule.

Antwort:

Die richtigen Antworten sind:

Der normale Luftdruck ist a) wesentlich größer als 1 Pa:

Der normale Luftdruck beträgt ungefähr $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} (100 \text{ kPa})$

Der normale Luftdruck ist d) entspricht dem Druck einer 10 m hohen Wassersäule:

Die Dichte von Wasser beträgt 10³ kg/m³. Nach der Formel für den hydrostatischen Druck erzeugt eine 10 m hohe Wassersäule einen Druck von

$$p = \rho \cdot g \cdot h = 10^3 \cdot 9,81 \cdot 10 \frac{N}{m^2} \approx 105 \frac{N}{m^2} = 105 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

was in etwa dem normalen Luftdruck entspricht.

Teste dein Wissen 3:

Beschreibe, wie Torricellis Barometer funktioniert.

Beispielantwort:

Torricellis Barometer misst den Luftdruck mithilfe einer Glasröhre, die mit Quecksilber gefüllt und an einem Ende verschlossen ist. Die Röhre wird umgedreht in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß getaucht. Der Luftdruck auf die Quecksilberoberfläche im Gefäß hält das Quecksilberoberfläche im Gefäß hält das Quecksilber in der Röhre auf einer bestimmten Höhe (bei normalem Luftdruck beträgt h = 76cm, gemessen von der Quecksilberoberfläche im Gefäß), die den atmosphärischen Druck widerspiegelt. Eine Abnahme des Luftdrucks führt zu einer geringeren Quecksilberhöhe in der Röhre, während ein Anstieg des Luftdrucks diese erhöht.

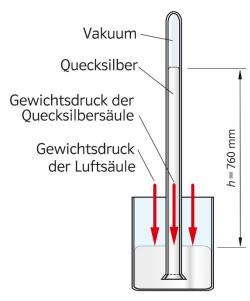


Illustration: Bernd Pavlik, Neusiedl am See

Teste dein Wissen 4:

Kreuze die richtige Antwort an.

Der Auftrieb ist

- a) im tiefen Wasser größer als im seichten Wasser.
- b) im seichten Wasser größer als im tiefen Wasser.
- c) unabhängig von der Tiefe des Wassers.

Antwort:

Die richtige Antwort ist c). Der Auftrieb ist unabhängig von der Tiefe des Wassers.

Der Auftrieb, den ein Körper im Wasser erfährt, hängt von dem Volumen des verdrängten Wassers bzw. des eingetauchten Volumens des Körpers ab, nicht von der Tiefe, in der sich der Körper befindet. Dieses Prinzip wird durch das Archimedische Prinzip beschrieben: Ein vollständig oder teilweise in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt einen Auftrieb F_A , der seinem Gewicht entgegenwirkt.

$$F_A = \rho_{Fl} \cdot g \cdot V$$

 $(
ho_{Fl}$... Dichte der Flüssigkeit, V ... Volumen der verdrängten Flüssigkeit)

Der Auftrieb ist so groß wie das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit.

Teste dein Wissen 5:

Wähle die richtige Antwort aus. Ein Gegenstand schwimmt, wenn

- a) sein Volumen genügend groß ist.
- b) sein Gewicht genügend klein ist.
- c) weder a noch b ist richtig, sondern ...

Antwort:

Die richtige Antwort ist c) weder a noch b ist richtig, sondern ein Gegenstand schwimmt, wenn die (mittlere) Dichte des Gegenstands geringer ist als die der Flüssigkeit. Die

entscheidende Bedingung ist somit das Verhältnis der Dichten. Hat der Körper eine größere (mittlere) Dichte als die Flüssigkeit, dann geht er unter, ist seine Dichte kleiner, dann schwimmt er.

Rechenaufgabe 1:

Eine Nadel kann ganz schön spitz sein. Erkläre den Ausdruck "eine Nadel sticht" und überlege kurz, wie du den Druck an ihrer Spitze abschätzen könntest. Nimm dazu an, dass du mit der Nadel mit einer Kraft von 0,1 N auf deine Haut drückst. Schätze die Fläche der Nadelspitze ab und schätze mit diesen Größen den Druck an ihrer Spitze ab.

Beispielantwort:

Eine Nähnadel hat einen Durchmesser von etwa 1mm. Der Druck der Nadel auf die Haut oder auf ein Gewebe hängt von der Größe und Form der Nadel ab, sowie von der Kraft, mit der die Nadel auf das Gewebe oder Haut gedrückt wird. Nimmt man ganz grob F = 0,1 N an und den Querschnitt der Spitze $A \approx 1 \text{ mm}^2 = 10^{-6} \text{ m}^2$ an, erhält man als Druck:

$$p = \frac{F}{A} \approx 10^5 \frac{N}{m^2} = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

Rechenaufgabe 2:

Ein Holzstück (Volumen: 3dm³) schwimmt auf dem Wasser und taucht mit 50% seines Volumens ein. Bestimme die Kraft, die mindestens erforderlich ist, um das Holzstück ganz unter Wasser zu drücken.

Antwort:

Der Auftrieb wirkt dem Gewicht des Holzstücks entgegen.

Durch Gleichsetzen der Auftriebskraft mit der Gewichtskraft:

$$F_A = \rho_{Wasser} \cdot g \cdot V_{eingetaucht} = \rho_{Holz} \cdot g \cdot V_{gesamt} = F_G$$

kann man somit die Dichte des Holzes erhalten:

$$\rho_{Holz} = \frac{\rho_{Wasser} \cdot V_{eingetaucht}}{V_{gesamt}} = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,0015 \text{ m}^3}{0,003 \text{ m}^3} = 500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Taucht man den Körper komplett ein, dann beträgt der Auftrieb:

$$F_A = \rho_{Wasser} \cdot g \cdot V_{eingetaucht} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.003 \text{ m}^3 \approx 30\text{N}$$

Das Gewicht des Körpers ist:

$$F_G = \rho_{Holz} \cdot g \cdot V_{gesamt} = 500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,003 \text{ m}^3 \approx 15\text{N}$$

Das heißt man benötigt etwa 15 N um den Köper ganz unter Wasser zu drücken.

Rechenaufgabe 3:

Ein Heißluftballon hat eine Masse (inkl. Korb und Personen) von 1950 kg. Die Dichte von Luft beträgt bei 0 °C 1,3 kg/m³, im Ballon bei 100 °C 0,95 kg/m³.

- a) Ermittle das Volumen, welches die Ballonhülle mindestens fassen muss, damit der Ballon in der Luft schweben kann.
- b) Bestimme den Durchmesser des Ballons. Nimm dabei an, dass er kugelförmig ist.

Antwort:

3 a) Der Auftrieb F_A ist gleich der Differenz der Gewichte der verdrängten Luftmasse (Volumen V) bei der Lufttemperatur 0° C und der Heißluft (100° C) im Ballon:

$$F_A = (\rho_0 - \rho_{100}) \cdot g \cdot V$$

Damit der Ballon schwebt, muss der Auftrieb mindestens so groß wie das Gewicht des Ballons sein:

$$F_A \geq m_{Ballon} \cdot g$$

Daher:

$$V = \frac{m_{Ballon}}{(\rho_0 - \rho_{100})} = \frac{1950 \text{ kg}}{0.35 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \approx 5572 \text{ m}^3$$

b) V = $(4\pi/3) \cdot R^3 \rightarrow R \approx 11$ m. Der Durchmesser beträgt ca. 22 m.

b) Das Volumen einer Kugel mit Radius R ist gegeben durch

$$V=\frac{4\pi\cdot R^3}{3}$$

 $V=\frac{4\pi\cdot R^3}{3}$ Stellt man die Formeln nun nach R um und setzt das Ergebnis aus a) für das Volumen ein:

$$R = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 3}{4\pi}} \approx 11 \text{ m}$$

Die Ballonhülle muss somit mindestens ein Volumen von etwa 5 572 m² haben und hat damit (wenn man annimmt, dass der Ballon kugelförmig ist) einen Durchmesser von etwa 22 m.

Rechenaufgabe 4:

Gib einen Eiswürfel in ein Becherglas und fülle es randvoll mit Leitungswasser. Beobachte die Wasseroberfläche, während das Eis schmilzt, und beschreibe den Vorgang. Läuft beim Schmelzen Wasser über den Rand des Becherglases? Begründe deine Antwort.

Beispielantwort:

Der Wasserstand bleibt gleich. Der Eiswürfel verdrängt so viel Wasser, wie durch das Schmelzen entsteht.

Zusatz: Eis hat eine geringere Dichte als flüssiges Wasser und schwimmt deshalb darauf. Beim Schmelzen wird das Eis zu Wasser, welches zwar eine höhere Dichte aber damit auch ein kleineres Volumen als Eis hat. Das neue Wasservolumen, ersetzt nun das zuvor eingetauchte Teilvolumen des Eiswürfels.

Rechenaufgabe 5:

Containerschiffe der Klasse Ultra Large sind bis rund 400m lang und 60m breit. Ihr Tiefgang, also wie tief sie ins Wasser eintauchen, beträgt in Süßwasser bis zu 16m.

- a) Überlege und begründe, wie sich der Tiefgang im offenen Meer ändert.
- b) Berechne den maximalen Tiefgang in Meerwasser (Dichte = 1 030 kg/m³).

Antwort:

Der Auftrieb im Süßwasser und im Meerwasser ist immer gleich dem Gewicht des Schiffs. Allerdings ändert sich der Tiefgang eines Schiffs im Meerwasser, da Meerwasser aufgrund des Salzgehalts eine höhere Dichte als Süßwasser hat. Dies führt dazu, dass das Schiff im Meerwasser besser auftreibt und somit einen geringeren Tiefgang hat als im Süßwasser.

b)

Um den maximalen Tiefgang in Meerwasser zu berechnen, können wir die Auftriebskraft (die dem Gewicht des verdrängten Wassers entspricht) im Süßwasser und im Meerwasser vergleichen. Das Gewicht des Schiffes bleibt konstant, aber die Dichte der Flüssigkeit ändert sich, was uns erlaubt, das verdrängte Volumen für beide Szenarien zu vergleichen und den Tiefgang zu berechnen.

Das Volumen V_W des verdrängten Süßwasser bzw. Meerwassers $V_W = L \cdot B \cdot T_W$ Ist proportional zu T_W , dem Tiefgang im Süßwasser/Meerwasser, wobei L die Länge und B die Breite des Containerschiffes ist.

Das Gewicht des Schiffes (und somit die Auftriebskraft F_A) ist gleich dem Gewicht F_G des verdrängten Süßwassers bzw. Meerwassers. Zusätzlich können wir das Volumen V_W durch den Ausdruck für den Tiefgang ersetzen und erhalten:

$$F_A =
ho_W \cdot g \cdot (L \cdot B \cdot T_W) = F_G \ (
ho_W ... ext{ Dichte von Süßwasser/Meerwasser)}$$

Wir können diese Beziehung nutzen, um den Tiefgang T_{MW} im Meerwasser zu berechnen. Nun unterscheiden wir zwischen Süßwasser (SW) und Meerwasser (MW) und setzen die entsprechenden Formeln gleich:

$$F_{G-MW} = \rho_{MW} \cdot g \cdot (L \cdot B \cdot T_{MW}) = \rho_{SW} \cdot g \cdot (L \cdot B \cdot T_{SW}) = F_{G-SW}$$

Die Dichte ρ_{SW} von Süßwasser entspricht etwa 1 000 kg/m³. Nun setzen wir $F_{G-SW}=F_{G-MW}$ und formen nach T_{MW} um:

$$T_{MW} = \frac{\rho_{SW} \cdot T_{SW}}{\rho_{MW}} = \frac{1\ 000\ \text{kg/m}^3 \cdot 16\ \text{m}}{1\ 030\ \text{kg/m}^3} \approx 15,53\ \text{m}$$

Der maximale Tiefgang im Meerwasser beträgt somit rund 15,5 m.

Rechenaufgabe 6:

In Abb 71.1 und 71.2 siehst du, wie der Reifendruck in verschiedenen Luftreifen gemessen wird. Notiere dir für jedes Bild den Wert des Luftdrucks in bar. Bewerte, ob dieser Wert für einen Reifen von einem normalen PKW bzw. einem Fahrrad stimmen kann. Recherchiere, in welchen Einheiten der Luftdruck in anderen Ländern angegeben wird und rechne den Luftdruck in diese Einheiten um.



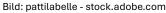




Bild: Florentin Triebl/ öbv, Wien

Beispielantwort: Luftdruckwerte:

Abbildung 71.1: Der Luftdruck im Reifen beträgt ca. 2,5 bar. Für einen normalen PKW ist dies ein typischer (durchschnittlicher) Wert. Die meisten PKWs haben einen empfohlenen Reifendruck im Bereich von 2,0 bis 2,9 bar, je nach Fahrzeugtyp und Herstellerangaben.

Abbildung 71.2: Der Luftdruck im Reifen beträgt etwa 2,5 bar. Für Fahrradreifen kann dieser Wert je nach Fahrradtyp und persönlicher Vorliebe variieren. Rennräder haben in der Regel einen höheren Reifendruck als Mountainbikes oder Stadtfahrräder (City-/Trekkingbikes). Typische Druckwerte für Fahrradreifen liegen zwischen 2,5 und 8 bar, abhängig vom spezifischen Fahrradtyp und den Vorlieben des Fahrers oder der Fahrerin.

Luftdruckeinheiten in verschiedenen Ländern:

Neben Bar wird der Luftdruck häufig, besonders in den USA, in der Einheit Psi (Pound-force per square inch) angegeben. In wissenschaftlichen Kontexten wird der Druck oft in Pascal (Pa) bzw. Kilopascal (kPa), aber auch in Torr und atm (Atmosphären) angegeben.

Umrechnungen:

1 bar = 14,5038 Psi 1 bar = 100 000 Pa = 100 kPa 1 bar ≈ 750,062 Torr 1 bar ≈ 0,9869 atm

Die umgerechneten Luftdruckwerte sind wie folgt (2,5 bar):

In Psi: ca. 36,26 Psi In kPa: 250 kPa

In Torr: ca. 1875,16 Torr In atm: ca. 2,47 atm