8.5 Erweiterung und Vertiefung – Die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

Ein Körper schwingt dann harmonisch, wenn auf ihn eine Kraft wirkt, die proportional zu seiner Auslenkung aus der Gleichgewichtslage ist:

$$m \cdot a = -k \cdot s$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

m ... Masse des Pendelkörpers
a .... Beschleunigung
k .... Konstante
s .... Auslenkung

Wir erhalten daher die folgende Differentialgleichung:

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} + k \cdot s = 0$$

Diese Differentialgleichung wird durch den Ansatz $s = r \cdot \sin(\omega \cdot t)$ gelöst. Durch Differenzieren folgt:

$$\frac{ds}{dt} = r \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

s .... Elongation
t..... Zeit
r..... Amplitude
ω ... Kreisfrequenz
T.... Schwingungsdauer

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$m \cdot (-\omega^2) \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t) + k \cdot r \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0$$

$$r \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot (-m \cdot \omega^2 + k) = 0$$

$$-m \cdot \omega^2 + k = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Für die Schwingungsdauer erhalten wir daher:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

9.6 Die Amplitude einer gedämpften Schwingung

Die Amplitude einer gedämpften Schwingung nimmt mit der Zeit ab. Die Abnahme Δr ist proportional zur Amplitude $r(t)$ und proportional zur Zeitspanne Δt. Das negative Vorzeichen gibt an, dass die Amplitude abnimmt:

$$\Delta r = -\delta \cdot r(t) \cdot \Delta t$$

Die sekundliche Abnahme der Amplitude ist proportional zur momentanen Auslenkung:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = -\delta \cdot r(t)$$

Die Differentialgleichung kann durch integrieren gelöst werden:

$$\int \frac{dr}{r(t)} = -\int \delta \cdot dt$$

$$\ln r(t) = -\delta \cdot t + c$$

$$r(t) = k \cdot e^{(-\delta t)}$$

Der Wert für die Konstante *k* folgt aus der Anfangsbedingung $r(0) = r_0$:

$$r_0 = k \cdot e^{(-\delta 0)}$$

$$r_0 = k \cdot 1$$

Die Abnahme der Schwingungsamplitude wird somit durch eine Exponentialfunktion beschrieben:

$$r(t) = r_0 \cdot e^{-\delta t}$$

δ ... Dämpfungskonstante

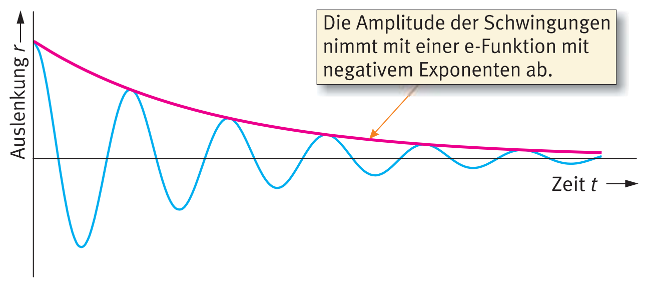

Abb. 80.1: Die Amplitude der Cosinus-Kurve nimmt nach einer Exponentialfunktion mit negativem Exponenten ab.

Für die momentanen Auslenkungen der gedämpften Schwingung ergibt sich:

$$s(t) = r_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Für große Werte der Dämpfungskonstanten *δ* ergeben sich stark gedämpfte Schwingungen. Die Schwingungsfrequenz *ω* ist etwas geringer als bei der ungedämpften Schwingung.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}$$

ω ... Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung
ω_0.. Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung
δ.... Dämpfungskonstante

Nach 55